Long-term Recurring Deposits with Variable Installments

Rosen Nikolaev - Prof. Dr.
University of Economics – Varna, Varna, Bulgaria
nikolaev_rosen@ue-varna.bg

Abstract

Term periodic deposits are the main means of forming people's savings. Different needs and savings opportunities can be met through different modifications of the standard schemes for depositing funds in periodic deposits. The paper offers three options for long-term recurring deposits with changing contributions. Methods for deriving generalized formulas in each of them are proposed and peculiarities in solving problems of this type are considered. The theoretical results are aprobed with examples and self-study tasks are proposed. The research in the article has not only practical meaning, but can also be useful in the process of educating pupils and university students, as it enables them to realize the overall logic of deposit formation and make their own modifications.

Keywords: Deposit, Geometric Progression, Variable Installments.

JEL Code: C02

Въведение

Дългосрочните финансови операции се появяват като следствие от необходимостта на хората да ползват пари на заем или да правят свои собствени спестявани. Едни от основните дългосрочни финансови операции, които се осъществяват в банките са:

- дългосрочни влогове;
- дългосрочни заеми;
- влогове с дългосрочни тегления и др.

Формирането на спестявания се свързва с различни влогове в банковите институции. Когато те се правят периодично в продължение на дълъг период от време се наблюдават познатите от специализираната научна литература срочни периодични влогове. Самият процес на формиране на такива влогове е свързан с предоставяне на парични средства на банковите институции, които следва да „заплатят“ за това чрез начисляване на лихва.

За всички тези операции има изведени формули и с помощта на компютърни изчисления могат да бъдат получени числовите стойности на всички интересуващи ни параметри. Много често на практика съществуват особености, възникващи от конкретната ситуация, които не са релевантни към стандартните формули и решения.

Това поставя въпроса за търсене на възможности за адаптиране на срочните периодични влогове според потребностите на хората. За това обаче е необходимо да се прилагат и съответно адекватни и математически коректни подходи за олихвяване, а не да се разчита винаги само на готовите стандартни решения (Дочев & Николаев & Петков, 2010; Милкова, 2020; Николаев и кол., 2021; Milkova, 2019; Петков, 2022; Йорданова, 2014).

През последните години се заговори много активно за финансовата грамотност на населението, в частност на учениците и студентите, не само в България, но и в световен план. Считаме, че е немислимо да се гради финансова грамотност без фундаментални познания по финансова математика. Предвид това, проблемите, които авторът изследва в тази и в други свои публикации (Николаев & Милкова, 2021; Николаев & Милкова, 2020; Николаев & Милкова, 2018; Николаев & Милкова & Мирянов, 2017; Николаев & Милкова, 2015; Николаев, 2015) са важни не само при практическото им приложение в икономиката, но и за учебния процес в училища и университети.

От няколко години се провежда Национална олимпиада (с международно участие от Русия, Румъния, Северна Македония и др.) по финансова грамотност, както и Олимпиада по финансова математика за студенти (Гроздев & Николаев & Шабанова & Форкунова &

Патронова, 2018; Николаев & Гроздев & Конева & Патронова & Шабанова, 2019; Николаев & Милкова, 2022; Николаев & Шабанова & Петраков, 2017). Залегнатото съдържание в настоящото изложение до голяма степен би помогнало на участниците в тези състезания.

В настоящата статия ще насочим вниманието си към дългосрочните периодични влогове, т.е. когато за продължителен период от време и през равни интервали от време, се осъществяват вноски по спестовна сметка в банка.

Основната цел на автора е да предложи методи за извеждане на формули и решаване на задачи, свързани с дългосрочни влогове с непостоянни вноски.

1. Теоретични постановки по темата

Теоретично са изведени някои основни формули в зависимост от броя и момента на осъществяване на вноските (Николаев и кол., 2021).

Нека:

V – постоянната вноска;

p – лихвен процент за един период;

n – брой периоди;

$q = 1 + \frac{p}{100}$;

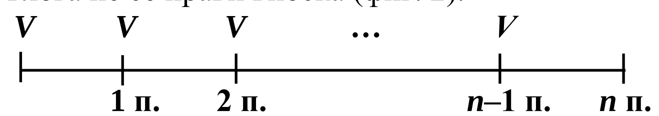
K_n – натрупана сума в края на n-тия период.

1. Осъществяват се вноски и при откриване и при закриване на влога (фиг. 1).

Фиг. 1

$$K_n = V\frac{q^{n+1}-1}{q-1} \tag{1}$$

2. При закриване на влога не се прави вноска (фиг. 2).

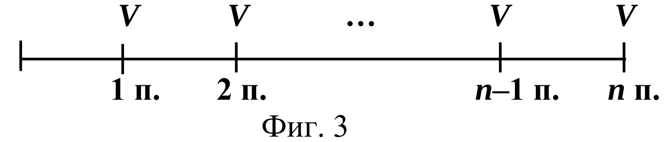


Фиг. 2

$$K_n = Vq\frac{q^{n}-1}{q-1} \tag{2}$$

Разликата в K_n между формула (1) и формула (2) е V.

3. Открива се влог, но вноските започват от края на първия период до последния включително (фиг. 3).



Фиг. 3

$$K_n = V\frac{q^{n}-1}{q-1} \tag{3}$$

4. Не се осъществяват вноски в началото и в края (фиг. 4).

Фиг. 4

$$K_n = Vq\frac{q^{n-1}-1}{q-1} \tag{4}$$

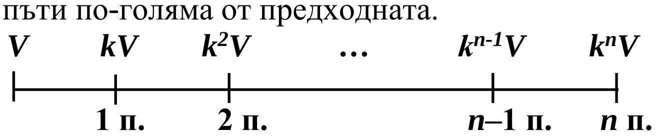
Разликата между стойностите на K_n във формули (3) и (4) е V.

Общото между всички тези варианти е, че вноската е постоянна.

2. Дългосрочни влогове с непостоянни вноски

Ако вноските са произволни е ясно, че не може да бъде изведена компактна формула. Ще разгледаме три случая.

1. Всяка вноска е k пъти по-голяма от предходната.



Фиг. 5

Ще приемем, че се осъществява вноска и в края (фиг. 5). Тогава

$$K_n = Vq^n + kVq^{n-1} + k^2Vq^{n-2} + ... + k^{n-1}Vq + k^nV =$$
$$= V(q^n + kq^{n-1} + k^2q^{n-2} + ... + k^{n-1}q + k^n)\ .$$

Сумата в скобите ще пресметнем по следния начин. Нека първо изнесем q^n пред скоби. Тогава

$$K_n = Vq^n\left(1+\frac{k}{q}+\frac{k^2}{q^2}+...+\frac{k^{n-1}}{q^{n-1}}+\frac{k^n}{q^n}\right)$$

и прилагаме формулата за сума от членовете на геометрична прогресия с първи член 1, частно $\frac{k}{q}$ и брой на членовете $n+1$. Тогава

$$K_n = Vq^n\frac{\left(\frac{k}{q}\right)^{n+1}-1}{\frac{k}{q}-1} = Vq^n\frac{k^{n+1}-q^{n+1}}{(k-q)q^n}$$

или

$$K_n = V\frac{k^{n+1}-q^{n+1}}{k-q}\ . \tag{5}$$

За онагледяване ще разгледаме следната задача.

Задача 1: Открит е влог с първоначална вноска от 100 лв. и в края на всяка година се внасят два пъти по-голяма сума от предходната. В същото време в края на всяка година се извършва олихвяване на наличната сума по сметката с 2% сложна годишна лихва. Каква е сумата по влога в края на десетата година след внасяне и олихвяване?

В случая стойностите на входните параметри са следните:

n=10 години;

p= 2% $\Rightarrow$ q=1,02;

V= 100 лв.;

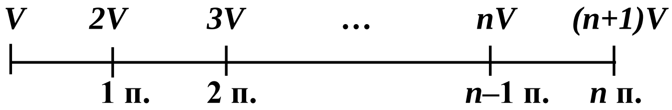
k= 2.

Като заместим във формула (5) получаваме

$$K_{10г}=100\frac{2^{11}-1,02^{11}}{2-1,02}=100\frac{2^{11}-1,02^{11}}{0,98}=208852,72 \text{ лв.}$$

2. Всяка вноска е пропорционална на номера на вноската.

Ще разгледаме случая, когато първата вноска е V, втората $2V$, третата е $3V$ и т.н., n-тата вноска е nV (фиг. 6).



Фиг. 6

Отново ще предположим, че се правят вноски и в началото и в края на целия период. Тогава

$$K_n=Vq^n+2Vq^{n-1}+3^2Vq^{n-2}+...+nVq+(n+1)V=$$
$$=V(q^n+2q^{n-1}+3^2q^{n-2}+...+nq+n+1) \ .$$

Както и в предходния случай ще изнесем q^n пред скоби

$$K_n=Vq^n\left(1+\frac{2}{q}+\frac{3}{q^2}+...+\frac{n}{q^{n-1}}+\frac{n+1}{q^n}\right) . \qquad (6)$$

Нека положим $\frac{1}{q}=x$. Тогава сумата в скобите е

$$f(x)=1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n \ .$$

Тази сума може да се пресметне по различни начини. Тук ще предложим два различни подхода.

Първи подход: Ще представим $f(x)$ като сума от суми на членовете на геометрични прогресии:

$$\begin{aligned} f(x)=1+x+x^2+x^3+...+x^{n-1}+x^n+ \\ +x+x^2+x^3+...+x^{n-1}+x^n+ \\ +x^2+x^3+...+x^{n-1}+x^n+ \\ +... \\ +x^{n-1}+x^n+ \\ +x^n \ . \end{aligned}$$

Това са $n+1$ суми от членовете на геометрични прогресии, всяка от които с частно x и всяка следваща с един член по-малко от предходната.

$$f(x)=\frac{x^{n+1}-1}{x-1}+x\frac{x^n-1}{x-1}+x^2\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+...+x^{n-1}\frac{x^2-1}{x-1}+x^n\frac{x-1}{x-1}=$$
$$=\frac{1}{x-1}(x^{n+1}-1+x^{n+1}-x+x^{n+1}-x^2+...+x^{n+1}-x^n)=$$
$$=\frac{1}{x-1}\left[(n+1)x^{n+1}-(1+x+x^2+...+x^n)\right]=$$
$$=\frac{1}{x-1}\left[(n+1)x^{n+1}-\frac{x^{n+1}-1}{x-1}\right]=$$

$$=\frac{1}{(x-1)^2}\left[(n+1)x^{n+2}-(n+1)x^{n+1}-x^{n+1}+1\right]=$$
$$=\frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1}{(x-1)^2}\ . \qquad (7)$$

Втори подход: При този подход решението е по-кратко, но изисква знания за производна на функция.

Нека разгледаме функцията:

$$F(x)=x+x^2+x^3+...+x^{n+1}\ .$$

Като сума от членовете на геометрична прогресия

$$F(x)=x.\frac{x^{n+1}-1}{x-1}=\frac{x^{n+2}-x}{x-1}\ .$$

От друга страна производната вляво е:

$$1+2x+3x^2+...+(n+1)x^n=f(x)\ ,$$

а вдясно

$$F'(x)=\frac{\left[(n+2)x^{n+1}-1\right](x-1)-x^{n+2}+x}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{(n+2)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}-x+1-x^{n+2}+x}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{(n+1)x^{n+2}-(n+2)x^{n+1}+1}{(x-1)^2}\ ,$$

което съвпада с израза в (7).

Сега заместваме x с $\frac{1}{q}$ и (7) придобива вида

$$\frac{\left(\frac{n+1}{q^{n+2}}-\frac{n+2}{q^{n+1}}+1\right)}{\left(\frac{1}{q}-1\right)^2}=\frac{n+1-(n+2)q+q^{n+2}}{q^n(q-1)^2}$$

и като заместим в (6) получаваме

$$K_n=V\frac{n+1-(n+2)q+q^{n+2}}{(q-1)^2}\ . \qquad (8)$$

Формула (8) дава натрупаната сума в края на n-тия период в случая, когато вноската е пропорционална на нейния номер (поредност).

Сега да разгледаме следната

Задача 2: Открит е влог с първоначална вноска от 50 лв. и в края на всеки следващ k-ти месец се внасят (k+1).50 лв. Олихвяването е сложно, в края на всеки месец при месечен лихвен процент p=0,2%. Каква е наличната сума в края на втората година от откриването на влога, след осъществяване на последната вноска и след олихвяване?

В тази задача входните параметри са следните:

n=24 месеца;

p= *0,2%* $\Rightarrow$ q=1,002;

V= *50* лв.

Тогава

$$K_{2г} = 50.\frac{25 - 26.1,002 + 1,002^{26}}{(0,002)^2} = 16513,02 \text{ лв.}$$

3. Всяка следваща вноска се увеличава или намалява с една и съща сума спрямо предходната (фиг. 7)

V ***V±L*** ***V±2L*** **…** ***V±(n–1)L*** ***V±nL***

1 п. **2 п.** ***n*–1 п.** ***n* п.**

Фиг. 7

$$K_n = Vq^n + (V \pm L)q^{n-1} + (V \pm 2L)q^{n-2} + ... + \left[V \pm (n-1)L\right]q + V \pm nL =$$
$$= V(q^n + q^{n-1} + q^{n-2} + ... + q + 1) \pm L(q^{n-1} + 2q^{n-2} + ... + (n-1)q + n) \ . \qquad (9)$$

В (9) за първата сума използваме формулата за сума от членовете на геометрична прогресия, а за втората сума използваме някой от подходите в т. 2.

Тогава второто събираемо в (9) се получава от формула (8) като вместо n запишем n–1 и вместо V запишем L. Така (9) придобива вида:

$$K_n = V\frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \pm L\frac{n - (n+1)q + q^{n+1}}{(q-1)^2} \ . \qquad (10)$$

Ще разгледаме следната задача.

Задача 3: Открит е влог с първоначална сума от 100 лв. и всеки следващ месец вноската се увеличава с 10 лв. спрямо тази в предходния. Олихвяването е сложно, в края на всеки месец при месечен лихвен процент $p=0,15\%$. Каква е наличната сума в края на 18-тия месец след откриване на влога, след внасяне на последната сума и олихвяване?

В случая:

V=100 лв.; L=10 лв.; q=1,0015; n=18 месеца и заместваме във формула (10).

$$K_{18м} = 100.\frac{1,0015^{19} - 1}{0,0015} + 10.\frac{18 - 19.1,0015 + 1,0015^{19}}{0,0015^2} =$$
$$= 1925,87 + 1724,62 = 3650,49 \text{ лв.}$$

В края ще предложим на читателите няколко задачи, след самостоятелно решаване на които, да затвърдят придобитите знания от изложеното в настоящата статия.

Задача 4: Открит е дългосрочен влог с първоначална вноска от 20 лв. и всеки следващ месец се утроява предходната сума. Олихвяването е сложно при годишен лихвен процент 2,4%. Каква е наличната сума в края на първата година след внасяне на съответната сума и след олихвяване?

Задача 5: Открит е влог с постоянна месечна вноска от 150 лв. при 1,2 % сложна годишна лихва. Ако олихвяването се осъществява в края на всеки месец, то след кой месец най-рано след осъществяване на последната вноска и олихвяване, натрупаната сума ще надхвърля 5000 лв.?

Задача 6: Открит е влог с 40 лв. първоначално, в края на първия месец нови 80 лв., в края на втория нови 120 лв. и т.н., в края на i-тия месец: (i+1).40 лв. Олихвяването е сложно и се осъществява в края на всеки месец. Ако в края на 18 месец, след внасяне и олихвяване натрупаната сума е 7650,40 лв., то да се намери годишния лихвен процент с точност до втория знак след десетичната запетая.

Упътване: Използвайте числено решаване на полученото уравнение.

Задача 7: Открит е влог с първоначална вноска от x лв. и всяка следваща вноска е в края на всеки месец и е с $0{,}05x$ по-малка от предходната. Олихвяването е сложно в края на всеки месец при месечен лихвен процент p=0,3%.

а) Общо колко вноски (заедно с първата) могат да се направят по тази схема?

б) При коя стойност на x сумата по сметката на 12-тия месец след внасяне и олихвяване ще е най-малко 5000 лв.?

Заключение

Представените в настоящата статия анализи на различните възможности за допълване на знанията за срочни периодични влогове с непостоянни вноски имат значение от практически характер. Освен това могат да бъдат полезни и в учебния процес на студенти по икономика. Статията може да представлява интерес и за учители и ученици при подготовката им за състезания по Финансова грамотност и други подобни.

References

1. Dochev, D., R. Nikolayev, Y. Petkov (2010). Finansova matematika. Varna: Nauka i ikonomika.
2. Grozdev, S., R. Nikolayev, M. Shabanova, L. Forkunova, N. Patronova.(2018). Itogi provedeniya Vtoroy mezhdunarodnoy olimpiady po finansovoy i aktuarnoy matematike sredi shkol'nikov i studentov. // sp. „Matematika i informatika”, kn. 5 ot 2018, tom 61, Sofiya: Az Buki, s. 423 – 443.
3. Milkova, T. (2020). YEdin aspekt v obucheniyeto na uchenitsi po finansova gramotnost // Dokladi ot V natsionalna konferentsiya „Pedagogika na obucheniyeto po matematika i informatika“, gr. Plovdiv, 2020 g., Institut za obrazovatelni politiki „Arkhimed i Diogen“. Sofiya: Alians print, s. 200-209.
4. Milkova, T. (2019) Some Simple Interest Models. Mathematics and Informatics, № 2, Volume 62, Sofia: Az-buki, p. 229 – 236.
5. Nikolayev, R., Suruzhon, D., Stoyanov, T., Zapryanova, T., Milkova, T., Miryanov, R. (2021). Prilozhna matematika. Varna: Nauka i ikonomika.
6. Nikolayev, R., S. Grozdev, B. Koneva, N. Patronova, M. Shabanova. (2019). Bolgarskaya olimpiada po finansovoy i aktuarnoy matematike v Rossii. // sp. „Matematika i informatika”, kn. 6 ot 2019, tom 62, Sofiya: Az Buki, s. 676 – 694.
7. Nikolayev, R., Milkova, T. (2022) Shesta mezhdunarodna olimpiada po finansova i aktyuyerna matematika. // sp. Matematika Plyus. Broy 1. S"stezaniya + s"stezateli, pomagaloto se izdava ot Asotsiatsiyata za razvitiye na obrazovaniyeto, str. 76-83.
8. Nikolayev, R., Milkova, T. (2021) S"shchnost i osobenosti pri srochnite periodichni vlogove. // sp. Matematika Plyus. Broy 3. M+ Seminar, pomagaloto se izdava ot Asotsiatsiyata za razvitiye na obrazovaniyeto, str. 74-84.
9. Nikolayev, R., Milkova, T. (2020) Nyakoi osobenosti v oblastta na finansovata matematika. // Dokladi ot IV natsionalna konferentsiya „Pedagogika na obucheniyeto po matematika i informatika“, gr. Veliko T"rnovo, 2019 g., Institut za obrazovatelni politiki „Arkhimed i Diogen“. Sofiya: Alians print, str. 193-201.
10. Nikolayev, R., Milkova, T. (2018) Nyakoi varianti za pogasyavane na d"lgosrochni ipotechni krediti.// Stroitelno predpriyemachestvo i nedvizhima sobstvenost: Sbornik s dokladi, Varna: Nauka i ikonomika, str. 50 – 59.

11. Nikolayev, R., Milkova, T., Miryanov, R. (2017) YEdin podkhod za optimizirane na finansovite vzaimootnosheniya mezhdu predpriyemach i kupuvachi v stroitelniya biznes . Stroitelno predpriyemachestvo i nedvizhima sobstvenost: Sbornik s dokladi, Varna: Nauka i ikonomika, 325 - 332.
12. Nikolayev R.N., Shabanova M.V., Petrakov D.P. (2017) Pervaya mezhdunarodnaya olimpiada po finansovoy matematike// Matematika i matematicheskoye obrazovaniye: sbornik trudov VIII Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii «Matematika. Obrazovaniye. Kul'tura (k 240-detiyu so dnya rozhdeniya Karla Fridrikha Gasa), 26-29 aprelya 2017 goda, Rossiya. G. Tol'yatti - Tol'yatti: Izd-vo TGU, str. 94-99.
13. Nikolayev, R. N., Milkova T. V. (2015) Nyakoi v"zmozhnosti za anyuitetni izchisleniya v usloviya na konkurentsiya. // „Ukrayna – Bolgariya – YEvropeyskiy soyuz: sovremennoye sostoyaniye i perspektivy“. Sbornik materialov mezhdunarodnoy nauchno-prakticheskoy konferentsii. Tom 1 – Kherson – Varna: Kherson, CHP Vyshemirs'kiy V. S., str. 276 – 279.
14. Nikolayev, R. N. (2015) Nekotoryye vozmozhnosti oplaty kredita i vlozheniya denezhnykh sredstv v bank. // Doklady i soobshcheniya 2-ya mezhdunarodnaya nauchno-prakticheskaya konferentsiya «Postsovetskoye prostranstvo territoriya innovatsii». Moskva, str. 278 – 283.
15. Petkov, Y. (2022) Likhveni i diskontni izchisleniya s MS Excel. Matematika plyus, Sofiya : Asotsiatsiya za razvitiye na obrazovaniyeto, 30, 2, str. 66-79.
16. Yordanova, V. (2014) Optimizirane na lizingovata deynost na stroitelnoto predpriyatiye. // sp. Izvestiya, Varna: Nauka i ikonomika, № 4, str. 32-41.